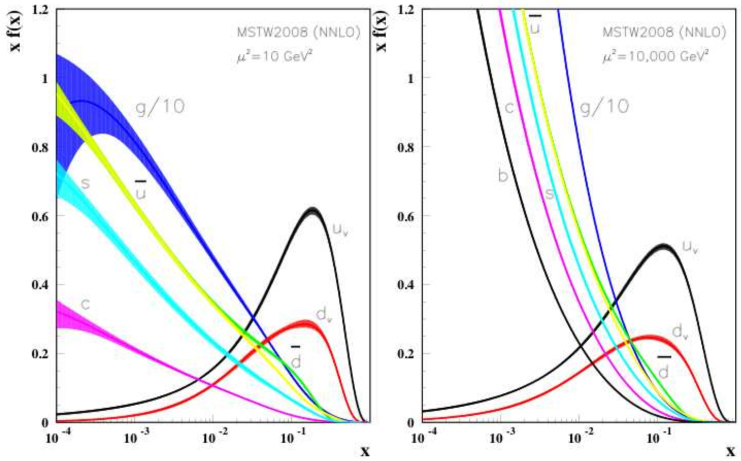
Ćwiczenie 5
ROOT – prosty generator Monte Carlo zderzeń proton-proton

1. Wstęp teoretyczny

Proton nie jest cząstką elementarną – składa się z partonów: kwarków walencyjnych oraz tzw. morza kwarków i gluonów. Z eksperymentów przeprowadzonych np. na akceleratorze HERA wiadomo, że partony niosą różny ułamek pędu całego protonu. Przykładowe wyniki pomiarów dla $\mu^2 = 10$ GeV^2 oraz $\mu^2 = 10000$ GeV^2 pokazane są na Rysunku 1.



Rysunek 1. Rozkład niespolaryzowanych rozkładów partonowych ($f(x)$) pomnożonych przez niesiony ułamek pędu (x) dla dwóch skal $\mu^2 = 10$ GeV^2 oraz $\mu^2 = 10000$ GeV^2.

Jak można zaobserwować, kwarki walencyjne niosą przeważnie duże ułamki pędu (x), natomiast gluony oraz kwarki morza dominują w rejonie małych x. Ponadto rozkład ten zmienia się w zależności od tego, w jaki sposób patrzymy na proton (tzw. skala, μ^2).

Przeważnie zderzenia na LHC nie są tak naprawdę zderzeniami protonu z protonem, lecz kwarku z kwarkiem, kwarku z gluonem czy gluonu z gluonem. Do celów ćwiczenia założymy następujące postaci rozkładu kwarków oraz gluonów:

— $q(x) = 30 \cdot x \cdot (1-x)^4$,

— $g(x) = 5 \cdot (1 - \sqrt[4]{x})$,

gdzie stałe zostały tak dobrane, by rozkłady miały interpretację prawdopodobieństwa.

2. Cele ćwiczenia

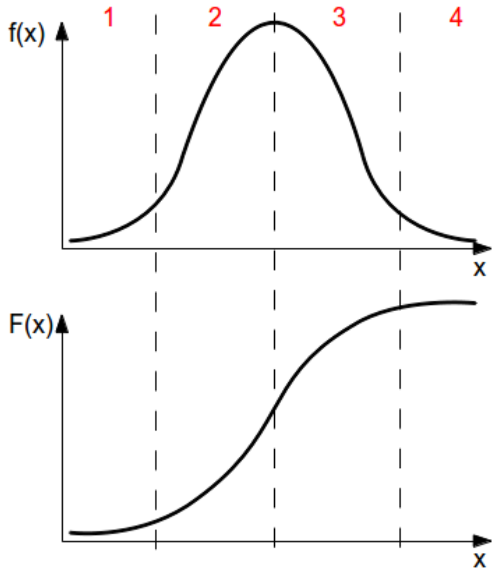
Celem ćwiczenia jest zapoznanie z podstawowymi właściwościami zderzeń proton-proton. W celu badania takich właściwości, a w szczególności do uwzględnienia efektów detektorowych stosuje się generatory Monte Carlo. Pierwszym problem, który należy zaadresować, jest wygenerowanie przypadków o zadanym rozkładzie. Standardowe, zaimplementowane w bibliotekach, metody losowania zawierają najczęściej używane funkcje, takie jak rozkład jednorodny, Poissona czy Gaussa. Inne rozkłady (np. założone w ćwiczeniu $q(x)$ oraz $g(x)$) należy zaimplementować własnoręcznie.

Jedną z metod pozwalających na uzyskanie liczb o danym rozkładzie jest **metoda odwrotnej dystrybuanty**. Metoda ta opiera się na następującym twierdzeniu:
Jeśli u jest losowane jednorodnie z przedziału $[0,1]$, to $X = F^{-1}(u)$ ma dystrybuantę $F(x)$.
Dowód (dla funkcji ściśle monotonicznych): $P(X \leqslant x) = P(F^{-1}(u) \leqslant x) = P(u \leqslant F(x)) = F(x)$

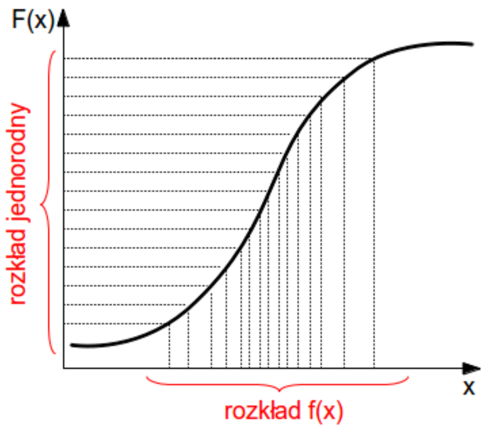
Działanie metody jest następujące:

1. W obszarach 1 oraz 4 funkcja $f(x)$ jest mała, w związku z tym dystrybuanta $F(x)$ rośnie wolno (Rys. 2 (góra)).
2. W obszarach 2 oraz 3 funkcja $f(x)$ jest duża, w związku z tym dystrybuanta $F(x)$ rośnie szybko (Rys. 2 (dół)).
3. Losując jednorodnie rozkład $u = F(x)$ widzimy (por. Rys. 3), że rozkład x jest gęsty tam, gdzie $F(x)$ jest stroma (czyli $f(x)$ jest duża).

Widać więc, że metoda ta opiera się na znalezieniu funkcji odwrotnej do dystrybuanty i wylosowaniu przy jej użyciu wartości z rozkładu jednorodnego.



Rysunek 2. Zasada działania metody odwrotnej dystrybuanty.



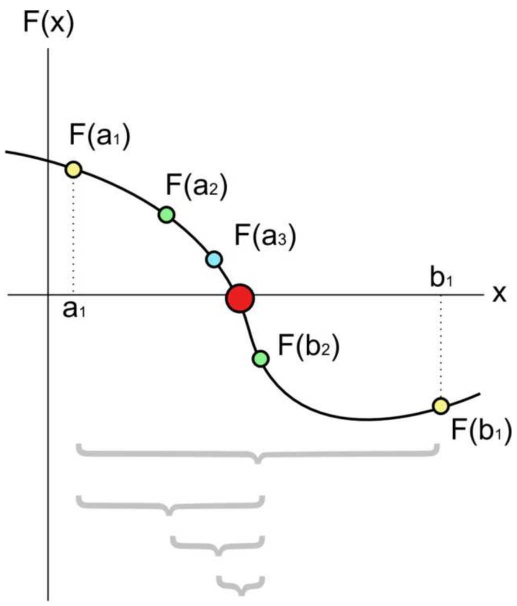
Rysunek 3. Zasada działania metody odwrotnej dystrybuanty.

Patrząc na postać funkcji $q(x)$ oraz $g(x)$ można łatwo zauważyć, że nie jest znany sposób znalezienia funkcji odwrotnej metodami analitycznymi. W tym celu dla każdego przypadku należy znaleźć rozwiązanie numeryczne. Można to zrobić np. **metodą bisekcji**. Metoda ta opiera się na twierdzeniu Bolzano-Cauchy'ego: *Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.*

Przebieg algorytmu jest następujący (por. Rys. 4):

1. Sprawdzić, czy pierwiastkiem równania jest punkt $x_1 = \frac{a+b}{2}$, czyli czy $f(x_1) = 0$.
2. Jeżeli tak jest, algorytm kończy się, a punkt jest miejscem zerowym. W przeciwnym razie x_1 dzieli przedział $[a, b]$ na dwa mniejsze przedziały $[a, x_1]$ i $[x_1, b]$.
3. Wybierany jest ten przedział, dla którego spełnione jest drugie założenie, tzn. albo $f(x_1)f(a) < 0$ albo $f(x_1)f(b) < 0$. Cały proces powtarzany jest dla wybranego przedziału.

Działanie algorytmu kończy się w punkcie 2 albo po osiągnięciu żądanej dokładności przybliżenia pierwiastka.



Rysunek 4. Zasada działania metody bisekcji.

3. Przebieg ćwiczenia

1. Zalogować się na CC1.
2. Utworzyć i przejść do katalogu `/media/cwiczenie5`.
3. Wygenerować 10^6 liczb losowych o rozkładzie $g(x)$ oraz 10^6 liczb losowych o rozkładzie $q(x)$. Liczby o takich rozkładach można uzyskać wykorzystując **metodę odwrotnej dystrybuanty**. W tym celu należy:
   a) utworzyć funkcję `double G_x(double x)` obliczającą dystrybuantę $g(x)$: $G(x) = 5 \cdot x - 4 \cdot x^{5/4}$,
   b) utworzyć funkcję `double Q_x(double x)` obliczającą dystrybuantę $q(x)$: $Q(x) = 5 \cdot (x-1)^6 + 6 \cdot (x-1)^5 + 1$,
   c) utworzyć funkcje `double inwersja_G(double u)` oraz `double inwersja_Q(double u)` znajdujące wartość funkcji odwrotnej do $G(x)$: $G^{-1}(u)$ oraz $Q(x)$: $Q^{-1}(u)$. Funkcje te można znaleźć rozwiązując numerycznie równania $G(x) - u = 0$ i $Q(x) - u = 0$, np. metodą bisekcji:
      i. zaczynając od `x_min = 0` oraz `x_max = 1` obliczyć `x = (x_min + x_max)/2`,
      ii. jeżeli wartość funkcji `g_x(x)` jest większa od `u` to przypisz `x_max = x`,
      iii. w przeciwnym przypadku przypisz `x_min = x`,
      iv. działanie przerwij, gdy `x_max - x_min < e`, gdzie `e` to żądana precyzja.
   d) zbiór liczb wygenerowanych w wyniku działania funkcji `inwersja_G(double u)`, gdzie `u` jest losowane jednorodnie z przedziału $[0, 1]$ będzie miał rozkład $g(x)$.
4. Narysować rozkłady $g(x)$ oraz $q(x)$.
5. **Sprawdzić poprawność generacji: dopasować do wykresów funkcje** $g(x)$ **oraz** $q(x)$**.** Podać wartości parametrów oraz błędy zwracane przez funkcję fitującą. Ile wynosi χ^2? Ile jest stopni swobody?
6. Wygenerować 10^6 par liczb losowych x_1 oraz x_2 z rozkładów:
   — $q(x_1)$ i $q(x_2)$,
   — $g(x_1)$ i $g(x_2)$,
   — $q(x_1)$ i $g(x_1)$,

   a następnie dla każdej wygenerowanej pary obliczyć **masę niezmienniczą** oraz **prędkość układu środka masy zderzających się partonów**.

   Masa niezmiennicza:

   W przypadku zderzenia centralnego dwóch partonów o energiach $E_1 = x_1 \cdot E$ i $E_2 = x_2 \cdot E$ oraz pędach $p_1 = x_1 \cdot p$ i $p_2 = x_2 \cdot p$, gdzie x_1 i x_2 są ułamkiem energii(pędu) protonu niesionej przez parton, masa niezmiennicza układu wynosi:

   $\sqrt{s} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (p_1 + (-p_2))^2)} = \sqrt{(x_1 \cdot E + x_2 \cdot E)^2 - (x_1 \cdot p + (-x_2 \cdot p))^2)} =$
   $\sqrt{E^2(x_1 + x_2)^2 - p^2(x_1 - x_2)^2} \approx \sqrt{E^2(x_1 + x_2)^2 - E^2(x_1 - x_2)^2} = 2E\sqrt{x_1 x_2}$,

   przy założeniu, że $m << E$.

   Prędkość układu środka masy zderzających się partonów:

   $\vec{\beta} = \frac{p(x_1 - x_2)}{E(x_1 + x_2)} \approx \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$,

   gdzie zależność $\vec{\beta}$ od $\vec{p}$ i E można uzyskać ze wzorów:

   $\vec{p} = \gamma m \vec{\beta}$, $\gamma = \frac{1}{1 - \beta^2}$ oraz $m \cdot m = E \cdot E - p_x \cdot p_x - p_y \cdot p_y - p_z \cdot p_z$.
7. Stworzyć histogramy rozkładów masy niezmienniczej oraz prędkości systemu zderzających się partonów.
8. **Co można wywnioskować patrząc na wygenerowane rozkłady?**